Feuille de TD

Logique et raisonnement

Pour démarrer . . .

Exercice 1. Ecrire les ensembles suivants sous la forme d'intervalles ou d'ensembles plus simples :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 \leq 4\} =$ . . . . ,
2. $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2p+1 \mid p \in \mathbb{N}\} =$ . . . ,
3. $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} =$ . . ,

Exercice 2. Compléter les pointillés.

1. La fonction exp est à valeurs dans . . . . . .
2. La fonction . . . . est à valeurs dans $[-1, 1]$.
3. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto |x|$ est symétrique par rapport à . . . .
4. Le point M de coordonnées $(0, \sqrt{3})$ appartient à l'axe des . . . .
5. La courbe représentative de la fonction ln coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées . . . .
6. L'image de $\dfrac{3\pi}{4}$ par la fonction sin est . . . .
7. L'image de 2 par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^2 + \exp(x)$ vaut . . . .
8. Soit $x \in]0, 1[$. On a $\ln(x) \in$ . . . .
9. Les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{6}{x}$ et $x \longmapsto x + 5$ sont . . . .
10. Les droites d'équation $y = 2x + 1$ et $y = -x - 2$ sont sécantes au point de coordonnées . . . .

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$ la proposition « n est un multiple de 2 » et $Q(n)$ la proposition « $n^2 + n$ est un multiple de 3 ».

1. Déterminer les valeurs de vérité de « $(P \;\; et \;\; Q)(n)$ » (qui signifie « $P(n)$ *et* $Q(n)$ ») lorsque n est un entier entre 5 et 15.
2. Quels sont les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $(P \; et \; Q)(n)$ est vraie ?

---

1. On obtient le tableau suivant :

n	$P(n)$	$Q(n)$	$(P\, et\, Q)(n)$
5	F	V	F
6	V	V	V
7	F	F	F
8	V	V	V
9	F	V	F
10	V	F	F
11	F	V	F
12	V	V	V
13	F	F	F
14	V	V	V
15	F	V	F

2. $P(n)$ est vraie si n est pair, $Q(n)$ est vraie s'il existe un entier k tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 2$. Ainsi, $P(n)\; et\, Q(n)$ est vraie s'il existe un entier l tel que $n = 6l$ ou $n = 6l + 2$.

Exercice 4. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
3. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
4. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

---

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

2. $\exists x \in \mathbb{R}, 2x+1=0$. En effet, pour $x=-\dfrac{1}{2}$, l'équation est vérifiée.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+3x+2=0$. En effet, cette équation a deux solutions réelles, -1 et -2.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+2x+3 \neq 0$. En effet le discriminant \判別式\ Δ est strictement négatif.

Exercice 5. Compléter les phrases mathématiques suivantes par le connecteur logique qui convient : $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2=4$ . . . . . . $x=2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z=\overline{z}$ . . . . $z \in \mathbb{R}$.
3. $\theta=\pi$ . . . . . . $\mathrm{e}^{2i\theta}=1$.

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2=4 \Longleftarrow x=2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z=\overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
3. $\theta=\pi \Longrightarrow \mathrm{e}^{2i\theta}=1$.

Exercice 6. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2-1>0$.
2. $\forall p \in \mathbb{N},\ p(p-1)$ est pair.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0$ et $x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$.
5. $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \sqrt{n}+\sqrt{m}=0 \Longrightarrow n=m=0$.
6. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z},\ |x-y|>1$.

Ecrire la négation de chaque proposition.

---

1. Faux. Si $n=1$, alors $n^2-1=0$.
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n^2-1 \leq 0$.
2. Vrai. Soit p est pair et donc $p(p-1)$ est pair, soit p est impair et alors $p-1$ est pair, donc $p(p-1)$ est pair.
   Négation : $\exists p \in \mathbb{N},\ p(p-1)$ est impair.
3. Faux. Si $x+1=0$ et $x+2=0$, alors $x+1=x+2$ donc $1=2$.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0$ ou $x+2 \neq 0)$.
4. Vrai. -1 vérifie la première équation et -2 vérifie la deuxième (attention aux variables muettes ici !)
   Négation : $(\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ x+2 \neq 0)$.
5. Vrai. $\sqrt{n}$ et $\sqrt{m}$ sont deux nombres positifs, pour que la somme des deux soit nulle, il faut que les deux soient nuls.
   Négation : $\exists (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \sqrt{n}+\sqrt{m}=0$ et $\big(n \neq 0$ *ou* $m \neq 0\big)$.
6. Vrai. Il suffit de choisir $y=x-2 \in \mathbb{Z}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ |x-y| \leq 1$.

Exercice 7. Ecrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1. L'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.
3. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a $|1/n|<\varepsilon$.
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.
5. Tout nombre rationnel r s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{N}^*$.
6. Pour tout nombre réel non nul, il existe un nombre réel tel que le produit des deux nombres vaut 1.

---

1. $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x)=0$.
2. La proposition n'est pas assez précise, complétons-la : L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |1/n|<\varepsilon)$.
   La lettre grecque ε se prononce « epsilon ».
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x=y^2$.
5. $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ r=\dfrac{p}{q}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R},\ xy=1$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les propositions suivantes.

— P_1 : « La fonction f est minorée par 1 ».
— P_2 : « Il existe un nombre réel positif x tel que $f(x)$ est positif ».
— P_3 : « La fonction f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ».

— P_4 : « Pour tous réels x et y, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est plus petite que la distance entre x et y.

1. Ecrire chacune des propositions avec des quantificateurs. Ecrire leur négation.
2. Pour chacune des propositions, donner des exemples de fonctions telles que la proposition soit vraie, puis des exemples de fonctions telles que la proposition soit fausse.

— $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$. $non(P_1) : \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 1$.

— $P_2 : \exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$. $non(P_2) : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) < 0$.

— $P_3 : \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq A$. $non(P_3) : \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < A$ (cela signifie que la fonction f est majorée).

— $P_4 : \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. $non(P_4) : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| > |x - y|$.

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 9.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.
2. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. Les entiers $n-1$, n et $n+1$ sont consécutifs, donc un des trois est un multiple de 3. D'où, $n(n-1)(n+1)$ est aussi un multiple de 3.
2. Posons $n = 2$.
   On a alors $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ et 2 n'est pas un multiple de 3.
   Donc $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice 10. Les démonstrations suivantes sont fausses. Où sont les erreurs ?

1. Soient a et b deux nombres réels. Supposons que $a = b$. En multipliant par a, on obtient $a^2 = ab$, donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$. En factorisant, on en déduit que $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, puis, en simplifiant par $a - b$, on obtient $a + b = b$, et donc $a = 0$. a étant un nombre réel quelconque, tout nombre réel est donc nul.
2. On cherche les réels x tels que $x^2 + x + 1 = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, x est non nul donc on obtient $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$. Or $x + 1 = -x^2$ donc $\frac{1}{x} = x^2$, ce qui donne $x = 1$. Donc 1 est solution et on a $3 = 0$.

---

1. On ne peut pas simplifier par $a - b$ puisque $a - b = 0$.
2. Avant la dernière phrase, on a montré que SI $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x^2 + x + 1 = 0$ ALORS $x = 1$. Mais la réciproque n'est pas vraie puisque $3 \neq 0$. On a en fait montré qu'il n'existe pas de solution réelle.

Exercice 11. Voici une preuve de la proposition « Tous les chats sont de la même couleur » :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition « si $C_1, \ldots, C_n$ sont n chats alors ils ont tous la même couleur ». Prouvons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Initialisation : Si $n = 1$, on considère un chat C. Il est de la même couleur que lui-même, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie. Montrons P_{n+1} : On considère $C_1, \ldots, C_{n+1}$ un ensemble de $n+1$ chats. Par hypothèse de récurrence, C_{n+1} est de la même couleur que C_n. À nouveau par hypothèse de récurrence, les n chats $C_1, \ldots, C_n$ sont de la même couleur. On en déduit donc que C_{n+1} a la même couleur que tous les autres chats.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Où est le problème ?

Le problème est la phrase « Par hypothèse de récurrence, C_{n+1} est de la même couleur que C_n ». Ceci utilise P_2, mais on n'a pas montré que P_2 est vraie. On a donc prouvé l'hérédité à partir de $n = 2$ mais l'initialisation est à $n = 1$.

Exercice 12. Démontrer les propositions suivantes, en précisant le type de raisonnement utilisé.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
3. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
5. Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
8. Pour tous $a < b$ réels, $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$.
9. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$
10. Soit x un réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, alors $x = 0$.

---

1. Démontrons le résultat par une récurrence double. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété « $u_n = 3^n - 2^n$ »
• Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0 = 3^0 - 2^0$, d'où $P(0)$. Pour $n = 1$, $u_1 = 1 = 3^1 - 2^1$, d'où $P(1)$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$, montrons $P(n+2)$.
On a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, donc par hypothèses de récurrence,
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) \\ &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} \\ &= 3^{n+2} - 2^{n+2}. \end{aligned}$$
D'où $P(n+2)$.
Par récurrence, on a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas.
• 1$^{\text{er}}$ cas : $x \geq 1$. Alors $x - 1 \geq 0$, donc $|x-1| = x - 1$.
On a donc
$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0.$$
• 2$^{\text{nd}}$ cas : $x < 1$. Alors $x - 1 < 0$, donc $|x-1| = -(x-1) = -x + 1$.
On a donc
$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 \geq 0.$$
Donc, dans tous les cas, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Raisonnons par analyse-synthèse.
• Analyse : Supposons qu'il existe une fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x), \end{cases}$$
car g est paire et h est impaire. On en déduit que
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
Ainsi, on a démontré que si f s'écrit sous la forme $f = g + h$ avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire, alors g et h sont données par les formules ci-dessus et sont donc uniques.
• Synthèse : Regardons si ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
Alors, on a $f = g + h$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \text{ et } h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$
Conclusion : on a donc démontré que toute fonction s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. Montrons, par contraposée, que si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$.
Alors $xy - x + y + 1 = xy + x - y + 1$, donc $-x + y = x - y$, soit $2x = 2y$. Donc finalement, $x = y$.
Donc par contraposée, si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
5. Soit n un nombre entier tel que n est le carré d'un nombre entier non nul. Supposons par l'absurde que $2n$ est le carré d'un nombre entier.
Comme n est le carré d'un nombre entier non nul, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k^2$.
Comme $2n$ est le carré d'un nombre entier, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2n = p^3$.
On a donc $2k^2 = p^2$ et k est non nul. Donc $2 = \dfrac{p^2}{k^2}$. On en déduit que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{k}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Donc $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
6. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété « $4^n + 5$ est un multiple de 3 ».
• Initialisation : Pour $n = 0$, $4^0 + 5 = 6$, donc $4^0 + 5$ est un multiple de 3. D'où $P(0)$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 5 = 3k$, donc $4^n = 3k - 5$.
On a donc
$$4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4 \times (3k-5) + 5 = 3(4k-5).$$
Donc $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3. D'où $P(n+1)$.
Par récurrence, on en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons les cas selon que n est pair ou impair.
• 1^{er} cas : n est pair. Alors 2 divise n, donc 2×2 divise $n \times n$.
• 2^{nd} cas : n est impair. Alors $n-1$ et $n+1$ sont pairs, donc 2×2 divise $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$.
• Donc, dans tous les cas, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
8. Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Montrons le résultat par double inclusion. Notons $T = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$.
• Soit $x \in [a,b]$. Montrons par analyse-synthèse que $x \in T$.
— *Analyse :* Si $x = ta + (1-t)b = b + t(a-b)$, alors $t = \dfrac{x-b}{a-b}$, car $a \neq b$.
— *Synthèse :* Posons $t = \dfrac{x-b}{a-b}$. Alors $t \leq \dfrac{a-b}{a-b} = 1$ et $t \geq \dfrac{a-a}{a-b} = 0$ donc $t \in [0,1]$. Et on a bien $x = ta + (1-t)b$. Donc $x \in T$.
Ainsi, $[a,b] \subset T$.
• Soit $x \in T$: il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b$. Alors $a \leq x \leq b$ donc $x \in [a,b]$. Ainsi $T \subset [a,b]$.
Par double inclusion, le résultat est prouvé.
9. Raisonnons par analyse-synthèse.
• Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Pour $(x,y) = (0,0)$, on a $f(0)^2 - f(0) = 0$, soit $f(0)(f(0)-1) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Pour $(x,y) = (1,0)$, on a $f(1)f(0) - f(0) = 1$. On en déduit que $f(0) \neq 0$. Donc $f(0) = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = 0$. Alors $f(x)f(0) - f(0) = x$, soit $f(x) - 1 = x$.
Donc finalement, $f(x) = x + 1$.
• Synthèse : Vérifions que la fonction $f : x \longmapsto x + 1$ vérifie la condition de l'énoncé. On a
$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) &= (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ &= xy + x + y + 1 - xy - 1 \\ &= x + y. \end{aligned}$$
Donc f est bien solution du problème.
Conclusion : Il existe une unique fonction f vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, c'est la fonction $x \longmapsto x + 1$.
10. Montrons, par contraposée, que si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$ alors $x = 0$.
Supposons que $x \neq 0$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.
Prenons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $|x| \geq \dfrac{|x|}{2} = \varepsilon$.
Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geq \varepsilon$.
Donc, par contraposée, si pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$ alors $x = 0$.

Exercice 13. Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

---

1. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$
• Initialisation : Pour $n = 1$, on a $1^3 = 1 = 1^2$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$.
Donc, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$,
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)(n+1)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$
D'où $P(n+1)$.
Par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Démontrons le résultat par une récurrence simple. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété « $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ».

• Initialisation : Pour $n = 0$, $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times x$. D'où $P(0)$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$.
On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$.
Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

car $nx^2 \geq 0$. D'où $P(n+1)$.
Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

3. Démontrons le résultat par une récurrence forte. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ la propriété $v_n = 3n$.
• Initialisation : Pour $n = 1$, $v_1 = 3 = 3 \times 1$. D'où $P(1)$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
On a $v_{n+1} = \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$. Donc par hypothèses de récurrence,

$$v_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} 3k = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{6}{n} \frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1).$$

D'où $P(n+1)$.
Par récurrence, on en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

■ *Pour continuer . . .*

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

— f est **injective**, si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$;
— f est **surjective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
— f est **bijective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists !\, x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

1. Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.
2. Une fonction monotone est-elle toujours injective ?
3. La fonction exp est-elle surjective ? Montrer que la fonction $x \longmapsto x(x-1)(x-2)$ est surjective.
4. Une fonction peut-elle être surjective et injective mais non bijective ?

---

1. Supposons par exemple que $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est strictement croissante. Soient x, $y \in \mathbb{R}$, on va montrer que $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$. Il y a deux cas :
   — Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$;
   — Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$.
2. La fonction nulle est monotone mais n'est pas injective.
3. f est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, vers $-\infty$ en $-\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction prend toutes les valeurs réelles.
4. Non, une fonction surjective et injective est bijective. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la surjectivité donne l'existence d'un nombre réel x tel que $f(x) = y$ et l'injectivité donne l'unicité de ce nombre réel x.

Exercice 15. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si $(u_n)_{n\in}$ tend vers ℓ_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_2, alors la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon\right).$$

Montrer que si f est continue en 0 et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(0)$.

---

1. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On sait donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|v_n| < \varepsilon$.
   Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0.
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|v_n| < \varepsilon$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n| \leq |v_n| < \varepsilon$.
   On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n| < \varepsilon$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_2. Montrons que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_1, (en prenant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$) il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_1$ alors $|u_n - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_2, (en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$) il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_2$ alors $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ donc $|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a $n \geq N_2$ donc $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, alors

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$. Donc la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, on peut définir $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, on a $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Comme la suite (u_n) tend vers 0, on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| < \delta$.

Soit $n \geq N$. Puisque $|u_n| < \delta$, on a

$$|f(u_n) - f(0)| < \varepsilon.$$

On a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|f(u_n) - f(0)| < \varepsilon$. C'est bien ce qu'on voulait montrer.

Exercice 16. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Il existe une infinité de nombres premiers.

Voici une preuve trop peu détaillée : « si $p_1, \ldots, p_r$ sont tous les nombres premiers, alors $n = p_1 \cdots p_r + 1$ est premier ». Rédiger proprement cette preuve.

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers et on les note $p_1, \ldots, p_r$ dans l'ordre croissant. Posons alors $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1 \in \mathbb{N}$. Puisque les nombres premiers sont plus grands que 1, on a $n > p_r$. On en déduit que n n'est pas premier, donc n est divisible par un des p_i. Or $n - 1$ est aussi divisible par p_i, donc p_i divise $n - (n-1) = 1$, ce qui est absurde. D'où : il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 17. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on définit la fonction $f + g$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

1. Soit $T > 0$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont T-périodiques, alors $f + g$ est T-périodique.
2. Soient $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$, soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T_1-périodique et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T_2-périodique. On suppose que $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f + g$ est périodique.
3. On définit $f : x \longmapsto \cos(x)$ et $g : x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. La fonction $f + g$ est-elle périodique ?

---

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.
2. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$. On définit $T = qT_1 = pT_2$ et on vérifie que $f + g$ est T-périodique.
3. $f + g$ n'est pas périodique. Pour voir cela, on résout l'équation $(f+g)(x) = 2$:

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos\left(\frac{x}{2\pi}\right) = 2 &\iff \cos x = 1 \text{ et } \cos\left(\frac{x}{2\pi}\right) = 1 \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi \text{ et } \exists l \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2\pi} = 2l\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi \text{ et } \exists l \in \mathbb{Z},\ x = l \\
&\implies \exists k, l \in \mathbb{Z},\ 2k\pi = l \\
&\implies k = l = 0.
\end{aligned}$$

En effet, si $k \neq 0$, on obtient $2\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc $f + g$ prend la valeur 2 exactement une fois, en $x = 0$. La fonction $f + g$ ne peut pas être périodique.